ECON 2200, Kjerneregelen + litt maksimering: Handout

Kjell Arne Brekke

January 24, 2012

1 Innledning

Samme oppfordring som vanlig: Dette notatet er noen begreper og noen oppgaver som kan hjelpe deg til å forberede deg til forelesningen. Om du **prøver** å regne deg gjennom disse oppgavene vil det være mye lettere å følge med på det som blir gjennomgått på forelesningen. Alle oppgavene kan besvares på fronter.uio.no. Logg inn med ditt brukernavn og passord fra uio. Om du svarer på alle spørsmålene i froner tjener du 3 poeng til obligatorisk oppgave, uavhengig av om du svarer rett eller galt.

Om du finner oppgavene vanskelig, så ikke bli motløs. Vi skal gå gjennom dette på forelesningen.

2 Kjerneregelen

La oss først repetere den første kjerneregelen, når vi har funksjoner av en variabel.

$$f(x) = g(u(x))$$

Vi husker da at kjerneregelen gir

$$f'(x) = g'(u)u'(x)$$

Sist gang så vi på tilfellet der u er en funksjon av både x og y

$$f(x, y) = g(u(x, y))$$

og fant da at

$$f'_x(x, y) = g'(u) \cdot u'_x(x, y)$$

Hva nå om det er den ytterste funksjonen som har to argument

$$f(x) = g(u(x), v(x))$$

Et enkelt eksempel først. En strandkiosk selger både is og cola. Salget avhenger av hvor mange meter x han orker å trille vogna bort fra parkeringsplassen. Han selger for

$u(x)$ kroner i cola og $v(x)$ kroner i is. Det totale salget blir da $f(x) = u(x) + v(x)$. Hvor mye øker salget om han orker trille vogna en meter til? Med andre ord, hva blir $f'(x)$. For å gjøre det litt mer konkret, gir vi følgende funksjoner for $u(x)$ og $v(x)$, selv om de neppe er realistiske.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(u(x), v(x)) = u(x) + v(x) \\ u(x) &= (1 + x^2) \\ v(x) &= x^3 \end{aligned}$$

Vi må da selvsagt tenke på at x påvirker salget av både is og cola. Altså:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = 2x + 3x^2$$

I dette enkle tilfellet kunne vi sett at

$$f(x) = u(x) + v(x) = 1 + x^2 + x^3$$

og vi har alt lært å derivere denne funksjonen

$$f'(x) = 2x + 3x^2$$

Vi ser at vi får ikke rett svar om vi ikke tar hensyn til at x påvirker både u og v. Funksjonen $g(u, v)$ er ikke alltid så enkel som $u + v$, men det samme gjelder likevel: Vi må ta hensyn til at x påvirker både u og v. Mer presist gjelder følgende kjerneregel

$$\begin{aligned} \text{Når } f(x) &= g(u(x), v(x)) \\ \text{Så er } f'(x) &= g'_u(u, v)u'(x) + g'_v(u, v)v'(x) \end{aligned}$$

Oppgave 1 *Vi gjør eksempelet ovenfor litt mer komplisert*

$$\begin{aligned} f(x) &= g(u(x), v(x)) = u(x)v(x) \\ u(x) &= (1 + x^2) \\ v(x) &= x^3 \end{aligned}$$

med andre ord

$$f(x) = (1 + x^2)x^3$$

Nå blir

$$\begin{aligned} g'_u &= v \\ g'_v &= u \\ u'(x) &= 2x \\ v'(x) &= 3x^2 \end{aligned}$$

Hva blir da $f'(x)$?

1. $f'(x) = (2x)(3x^2) = 6x^3$

2. $f'(x) = 2x + 3x^2$

3. $f'(x) = (2x)x^3 + (1 + x^2)(3x^2) = 5x^4 + 3x^2$

3 Maksimering med flere variabler

Førsteordensbetingelser

En ås som er deriverbar i alle retninger er også bare flat på toppen. Akkurat som funksjoner av en variabel er flat på toppen.

Det gir oss førsteordensbetingelsen:

Theorem 1 *En deriverbar funksjon $z = f(x, y)$ kan bare ha et maksimum eller minimum i et indre punkt i mengden S dersom det er et **stasjonært** punkt, dvs*

$$f'_x(x, y) = 0 \text{ og } f'_y(x, y) = 0$$

Eksempel

La oss prøve å finne maksimum for funksjonen

$$f(x, y) = 3x + 7y + xy - 2x^2 - 4y^2.$$

Løsningskandidatene er da stasjonære punkt så vi deriverer og får

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 3 + y - 4x = 0 \\ f'_y(x, y) &= 7 + x - 8y = 0 \end{aligned}$$

Dette gir oss to ligninger og to ukjente. Fra første ligning ser vi at

$$\begin{aligned} 3 + y &= 4x \\ y &= 4x - 3 \end{aligned}$$

Det setter vi inn i den andre ligningen, slik at det bare inngår x i den andre ligningen.

$$\begin{aligned} 7 + x - 8y &= 0 \\ 7 + x - 8(4x - 3) &= 0 \\ 31 - 31x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Vi setter det tilbake i første ligning

$$\begin{aligned} 3 + y &= 4x = 4 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Vi har altså funnet et stasjonært punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$, men er dette et maksimum, eller minimum eller ingen av delene? Det vet vi ikke enda.

Oppgave 2 *Finn stasjonærpunktene til funksjonen*

$$f(x, y) = 4x + 8y - 2x^2 - 4y^2.$$

1. Det er ett stasjonærpunkt $(x, y) = (1, 1)$.
2. Det er to stasjonærpunkt $(x, y) = (4, 4)$ og $(x, y) = (8, 8)$.
3. Det er to stasjonærpunkt $(x, y) = (1, 1)$ og $(x, y) = (-1, -1)$.
4. Det er ett stasjonærpunkt $(x, y) = (4, 8)$.